

**Водинчар Г. М.**  
**G. M. Vodinchar**

**РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МОД СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО**

**CALCULATION AND APPLICATION OF APPROXIMATIONS FREE OSCILLATIONS EIGENMODES OF A ROTATING SPHERICAL SHELL OF A VISCOUSE FLUID FOR SIMULATION IN GEODYNAMO**

**Водинчар Глеб Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (Россия, Паратунка). E-mail: gvodinchar@ikir.ru.

**Gleb M. Vodinchar** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS (Russia, Paratunka). E-mail: gvodinchar@ikir.ru.

**Аннотация.** Собственные моды свободных колебаний вращающейся сферической оболочки вязкой жидкости образуют физически естественный базис для представления скорости в галеркинских приближениях задачи геодинамо, однако точные аналитические выражения для этих мод неизвестны. Целью работы является получение методики расчёта аппроксимаций мод. Аппроксимации строятся в виде линейных комбинаций собственных мод аналогичной задачи для невращающихся оболочек, явные выражения которых известны и образуют полную ортогональную систему (базис). Расчёт в таком базисе матрицы оператора спектральной задачи для вращающейся оболочки позволил выделить инвариантные подпространства оператора. Разработана технология построения аппроксимаций мод в каждом из подпространств с помощью комбинированных символьно-численных вычислений. Если для представления скорости выбирать в каждом из подпространств по одной аппроксимации, то в системе галеркинских приближений исчезают кориолисовы члены. Это позволяет далее на несколько порядков увеличить временной шаг численного решения модели.

**Summary.** The eigenmodes of free oscillations of a rotating spherical shell of a viscous fluid form a physically natural basis for representing velocity in Galerkin approximations of the geodynamo problem, however, the exact analytical expressions for these modes are unknown. The aim of the work is to obtain a technique for mode approximations calculating. Approximations are constructed in the form of linear combinations of eigenmodes of a similar problem for non-rotating shells, the explicit expressions of which are known and form a complete orthogonal system (basis). The calculation of the spectral problem for a rotating shell operator matrix in such a basis allowed us to identify invariant subspaces of the operator. A technology has been developed for constructing approximations of modes in each of the subspaces using combined symbolic-numerical computations. If we select one approximation in each of the subspaces to represent the velocity, then the Coriolis terms disappear in the system of Galerkin approximations. This allows us to further increase the time step of the system integration by several orders.

**Ключевые слова:** геодинамо, метод Галеркина, собственные колебания, вращающиеся жидкие оболочки, символьно-численные вычисления.

**Key words:** geodynamo, Galerkin's method, free oscillations, rotating fluid shells, symbolic-numerical computations.

*Работа выполнена за счёт Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. номер темы 124012300245-2).*

УДК 532.5

**Введение.** Задача геодинамо представляет собой задачу о магнитогидродинамической конвекции проводящей вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке с твёрдыми границами (внешнее ядро Земли) [7]. Система уравнений геодинамо связывает поля

скорости, давления, температуры и магнитной индукции и включает уравнения Навье-Стокса с кориолисовым и лоренцевым членами, уравнение температуропроводности и уравнение индукции.

Для её исследования применяют различные численные методы, в том числе и метод Галеркина. Следует отметить, что хотя метод Галеркина и является по своему происхождению численным методом решения исходных уравнений, его можно рассматривать при малом числе мод как способ построения маломодовых (малоразмерных) моделей [1; 3]. Геометрически он выполняет тогда проектирование исходных уравнений на подпространства, порождаемые модами разложения. При его использовании возникает вопрос о выборе базисов для разложения полей. Особенно это важно при построении маломодовых моделей, поскольку комбинации небольшого числа мод должны описать пространственные структуры, типичные для рассматриваемой задачи. Необходимо, чтобы моды определяли некоторые физически естественные для задачи пространственные структуры. Таким строением обладают собственные моды малых свободных колебаний полей. Отметим сразу, что применение процедуры Галеркина исключает из уравнения Навье-Стокса член с давлением [1], поэтому выбирать базис для представления этого поля нет необходимости.

Для полей температуры и магнитной индукции решение спектральных задач о свободных колебаниях, т. е. явный вид уравнений на собственные значения и явный вид собственных мод известны. Есть и эффективная методика расчёта параметров мод и собственных значений, основанная на использовании методов компьютерной алгебры [8].

Для поля скорости у соответствующей спектральной задачи во вращающейся оболочке аналитическое решение неизвестно. Известен лишь ряд классических результатов для невязкого случая (задача Пуанкаре) [2; 4], некоторые способы введения поправок на вязкость [2], общие свойства оператора задачи [5]. Целью настоящего исследования является разработка методики расчёта аппроксимаций собственных мод скорости во вращающейся оболочке на основе комбинированных символьно-численных компьютерных вычислений.

**Формулировка спектральной задачи.** Спектральная задача о собственных модах скорости  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  свободных колебаний вязкой вращающейся жидкости в сферической оболочке  $\Omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \vec{v} + \Delta \vec{v} - 2E^{-1} \vec{e}_z \times \vec{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla \vec{v} = 0, \\ \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{r} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – собственное значение;  $E$  – число Экмана;  $p$  – поле давления. Безразмерная форма задачи (1) записана для случая, когда в качестве единицы длины взят внешний радиус  $R$  оболочки, а в качестве единицы времени взято характерное время вязкой диссипации  $R^2/\nu$ , где  $\nu$  – кинематическая вязкость. Число Экмана  $E = \nu/(\omega R^2)$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения оболочки, является обратной безразмерной скоростью вращения.

Задача (1) рассматривается в гильбертовом пространстве  $H$  нулевых на  $\partial\Omega$  комплексных соленоидальных векторных полей со скалярным умножением, определяемым следующим образом:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_v = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v}^* d\vec{r}, \quad (2)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение, а интегрирование ведётся по объёму оболочки.

Оператор этой спектральной задачи не обладает симметрией эрмитового или косоэрмитового типа. Известно, что её спектр дискретный, а система собственных и присоединённых мод полная [5]. Аналитические решения и вид уравнений на собственные значения неизвестны. Однако по собственным модам этой задачи было бы удобно строить галеркинские приближения скорости в задаче геодинамо. Поскольку эти моды неизвестны, предлагается использовать их аппроксимации.

**Расчёт аппроксимаций собственных мод.** Аппроксимации собственных мод задачи (1) можно строить в виде линейных комбинаций собственных мод скорости для невращающейся оболочки, т. е. решений спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \mu \vec{v} + \Delta \vec{v} - \nabla p &= 0, \quad \nabla \vec{v} = 0, \\ \vec{v} &= 0, \quad \vec{r} \in \partial \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Формально она получается из задачи (1) при бесконечном значении числа Экмана. В отличие от (1) эта задача самосопряжённая, известны явные выражения для собственных мод и уравнения на собственные значения [5; 8]. Ортогональная система её собственных мод полна в  $H$ . Будем далее считать систему мод нормированной. Известно, что собственные моды отдельно вычисляются в подпространствах тороидальных и полоидальных полей и в каждом подпространстве определяются мультииндексом  $(k, n, m)$ , где индексы  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = -n, \dots, n$  соответствуют дискретизации спектра (2) в радиальном, широтном и долготном направлениях. Добавим ещё и бинарный индекс типа моды:  $type = T$  для тороидальной и  $type = P$  для полоидальной. Получаем 4-компонентный мультииндекс, являющийся идентификатором собственных мод и собственных значений задачи (3). Методика расчёта параметров этих мод и собственных значений разработана и подробно описана в работе [8].

С помощью расчёта матрицы оператора  $\Psi$  задачи (1) в базисе из мод задачи (3) выделены инвариантные подпространства этого оператора. Они являются линейными оболочками мод со следующими множествами мультииндексов:

$$\begin{aligned} H_0^T &= \{(T, k_1, 1, 0), (P, k_2, 2, 0), (T, k_3, 3, 0), (P, k_4, 4, 0), \dots\}, \\ H_0^P &= \{(P, k_1, 1, 0), (T, k_2, 2, 0), (P, k_3, 3, 0), (T, k_4, 4, 0), \dots\}, \\ H_m^T &= \{(T, k_0, |m|, m), (P, k_1, |m|+1, m), (T, k_2, |m|+2, m), (P, k_3, |m|+3, m), \dots\}, \\ H_m^P &= \{(P, k_0, |m|, m), (T, k_1, |m|+1, m), (P, k_2, |m|+2, m), (T, k_3, |m|+3, m), \dots\}, \\ k_i &= 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Эти подпространства ортогональны относительно скалярного произведения (2) и в прямой сумме дают всё пространство  $H$ .

Решения задачи (1) и их аппроксимации строятся в каждом из подпространств, определяемых этими множествами. Пусть в одном из подпространств выделено конечное  $s$ -элементное множество мод  $\vec{v}_j$  и соответствующих собственных значений  $\mu_j$  (где  $j$  – мультииндекс), на основе которых будут строиться аппроксимации мод задачи (1), и пусть эти  $s$  мод занумерованы в каком-либо порядке. Наиболее естественно их нумеровать в порядке возрастания собственных значений, что соответствует убыванию характерного времени диссипации этих мод. Отметим, что в пределах одного подпространства все собственные значения различны. В соответствии с этой нумерацией можно считать, что индекс  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Далее ищется приближённое решение задачи (1) в виде

$$\vec{v} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_s \vec{v}_s \quad (5)$$

методом Галеркина. Подстановка разложений (5) в задачу (1) и применение галеркинской процедуры приводит к  $\varepsilon$ -параметрической системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon x_k - \mu_k x_k - 2E^{-1} \sum_{j=1}^s \langle \vec{e}_z \times \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle_v x_j &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (6)$$

относительно коэффициентов аппроксимации (5). Нахождение значений параметра  $\epsilon$ , при которых система (6) имеет ненулевые решения, и самих этих решений является задачей на собственные значения и векторы для  $s \times s$  матрицы  $\Psi$  с элементами

$$\Psi_{ki} = \mu_k \delta_{ik} + 2E^{-1} \langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_k \rangle_v, \quad (7)$$

где  $\delta_{ki}$  – символ Кронекера. Методика расчёта скалярных произведений  $\langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_k \rangle_v$  с использованием сочетаний символьных и численных вычислений в системах компьютерной алгебры подробно описана в [8].

После вычисления элементов матрицы  $\Psi$  находятся её собственные значения и собственные векторы. Каждое собственное значение является аппроксимацией собственного значения задачи (1), а компоненты собственного вектора дают значения коэффициентов  $x_j$  в аппроксимациях вида (5) для собственных мод. В результате получаем  $s$  аппроксимаций мод в одном из подпространств.

В результате такого расчёта будут получены моды с комплексными элементами и комплексные значения коэффициентов  $x_j$ . Однако для задачи геодинамо нужны вещественные аппроксимации. В связи с этим надо сказать, что мнимые составляющие собственных мод задачи (3) из подпространств  $H_m^T$  и  $H_m^P$  обусловлены зависимостью этих мод от долготы  $\varphi$  в виде комплексной экспоненты  $\exp(im\varphi)$ . Поэтому для каждой из аппроксимаций из некоторого подпространства с индексом  $m$  всегда найдётся сопряжённая аппроксимация из аналогичного подпространства с индексом  $-m$ . Суммируя их, получаем вещественную аппроксимацию. А для индекса  $m = 0$  и сама матрица  $\Psi$ , и все её собственные значения будут вещественными.

**Применение в задаче геодинамо.** При построении галеркинских приближений в задаче геодинамо поля скорости, температуры и магнитной индукции представляются в виде разложений:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^L \beta_l(t) \vec{v}_l(\vec{r}), \quad T(\vec{r}, t) = \sum_{s=1}^S \alpha_s(t) T_s(\vec{r}), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{p=1}^P \gamma_p(t) \vec{v}_p(\vec{r}). \quad (8)$$

Эти разложения подставляются в исходную систему, и применяется стандартная галеркинская процедура проектирования уравнений на подпространства мод. Если в качестве базисных мод используются собственные моды свободного затухания полей, то говорят о спектральной модели геодинамо. Модель включает как динамическую систему для амплитуд в разложениях (1), так и набор самих мод в этих разложениях.

Спектральные задачи для температурных и магнитных мод имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \lambda T + \Delta T &= 0, \quad T = 0 \text{ при } \vec{r} \in \partial\Omega, \\ \eta \vec{B} + \Delta \vec{B} &= 0, \quad \Xi \vec{B} = 0 \text{ при } \vec{r} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где оператор граничных условий  $\Xi$  является линейным и однородным. Конкретный вид этого оператора не играет роли для целей настоящей работы. Его можно посмотреть, например, в [8], но общий смысл граничных условий для магнитной индукции – это ограниченность в центре ядра и непрерывный переход на внешней границе ядра в потенциальное поле, определяемое гармоническим потенциалом. Это так называемые вакуумные граничные условия для магнитного поля [7]. Отметим также, что поле  $T$  – это не полная температура, а отклонение температуры от равновесного гиперболического по радиусу профиля, соответствующего кондуктивному переносу тепла. Именно с этим связаны нулевые граничные условия для  $T$ .

Задачи (9) являются самосопряжёнными относительно скалярных произведений:

$$\langle T_1, T_2 \rangle_T = \int_{\Omega} T_1 \cdot T_2 \, d\vec{r} \quad \text{и} \quad \langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle_B = \int_{\Omega} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \, d\vec{r},$$

системы их собственных мод полны. Схема расчёта собственных мод и собственных значений описана в [8].

Модами скорости  $\vec{v}_l$  являются некоторые аппроксимации собственных мод задачи (1).

Динамическая система для амплитуд в разложениях (8) имеет квадратично-нелинейный вид с постоянными коэффициентами [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_l}{dt} &= \sum_{i,j=1}^L B_{lij}\beta_i\beta_j - \tilde{\epsilon}_l\beta_l + E^{-1}\sum_{i=1}^L E_{li}\beta_i + Ra Pr^{-1}\sum_{i=1}^S D_{li}T_i + \sum_{i,j=1}^P Q_{lij}\gamma_i\gamma_j, \\ & l = 1, 2, \dots, L, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,S} F_{sij}\beta_i\alpha_j + \sum_{i=1}^L H_{si}\beta_i - Pr^{-1}\lambda_s\alpha_s, \\ & s = 1, 2, \dots, S, \\ \frac{d\gamma_p}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,P} W_{pij}\beta_i\gamma_j - Pm^{-1}\eta_p\gamma_p, \\ & p = 1, 2, \dots, P, \end{aligned} \quad (10)$$

где Ra – число Релея, определяющее интенсивность конвективного процесса, а число Прандтля Pr и магнитное число Прандтля Pm дают характерные времена диффузии тепла и магнитной диссипации во временном масштабе вязкой диссипации. Физический смысл числа Экмана E выше уже описывался. Положительные  $\lambda_s$  и  $\eta_p$  являются собственными значениями температурных и магнитных мод, а положительные  $\tilde{\epsilon}_l = -\langle \vec{v}_l, \Delta \vec{v}_l \rangle_v$ .

Остальные коэффициенты в (10), обозначенные прописными буквами с нижними индексами, являются коэффициентами Галеркина. Выделим особо коэффициенты, являющиеся мерами кориолисова взаимодействия мод скорости:

$$E_{li} = \langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_l \rangle_v.$$

Очевидно, что  $E_{ll} = 0$  и  $E_{il} = -E_{li}$ . Из выражения спектральной задачи (1) и инвариантности подпространств (4) относительно оператора задачи (3) видно, что  $E_{li} = 0$ , если  $\vec{v}_l$  и  $\vec{v}_i$  из разных подпространств.

Будем теперь считать, что базисные моды скорости  $\vec{v}_l$  взяты по одной из нескольких подпространств (4). Тогда из системы (10) исчезают все кориолисовы члены. На первый взгляд может показаться, что из спектральной модели исчезла информация о вращении ядра. Однако в действительности она сохраняется в самих выражениях для базисных мод, поскольку коэффициенты аппроксимаций определяются как компоненты собственных векторов матрицы (7), а её элементы зависят от числа Экмана, т. е. от безразмерной скорости вращения. Поэтому пространственная структура мод скорости соответствует как самому факту вращения, так и его скорости. А эта структура отражается в величине коэффициентов Галеркина.

Такой подход позволяет существенно сократить временной шаг интегрирования системы (10). Действительно, характерные времена процессов в крупномасштабном динамо составляют  $\sim 10^3$  лет, а из-за кориолисова члена шаг приходится выбирать не более полусуток. Если же кориолисов член исключён из системы, то шаг интегрирования определяется минимальным из трёх времён: время вязкой диссипации (выбрано за единицу в (10)), время тепловой диффузии Pr, время магнитной диссипации Pm. При турбулентных значениях диффузионных коэффициентов (кинематической вязкости, температуропроводности, магнитной вязкости) для ядра Земли [6] получаем, что  $Pr = 10^4$ ,  $Pm = 5$ . Характерное же время вязкой диссипации  $\sim 4 \cdot 10^3$  лет. Поэтому

исключение кориолисова члена позволяет увеличить временной шаг численного решения системы (10) на 5-6 порядков.

**Заключение.** В работе получена методика расчёта аппроксимаций собственных мод свободных колебаний вязкой жидкости во вращающейся сферической оболочке. Она основана на применении комбинированных символьно-численных вычислений, которые могут быть реализованы в математических пакетах, поддерживающих операции векторного анализа в сферических координатах. Автором работы эта методика реализована в системе Maple.

Использование получаемых аппроксимаций в качестве базисных мод скорости при построении спектральных моделей геодинамо позволяет значительно (на 5-6 порядков) увеличить шаг численного решения спектральной модели по времени. Это даёт возможность рассчитывать временную динамику полей геодинамо на геологических масштабах времени, что позволяет, например, сравнивать статистические характеристики модельной шкалы магнитной полярности и реальной палеомагнитной шкалы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гледзер, Е. Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
2. Гринспен, Х. П. Теория вращающихся жидкостей / Х. П. Гринспен. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 303 с.
3. Монин, А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики / А. С. Монин. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 424 с.
4. Резников, Е. Л. О гладких приближениях собственных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое / Е. Л. Резников, Л. М. Розенкноп // Вычислительная сейсмология. – 1994. – Вып. 27. – С. 70-85.
5. Розенкноп, Л. М. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли / Л. М. Розенкноп, Е. Л. Резников // Вычислительная сейсмология. – 1998. – Вып. 30. – С. 121-132.
6. Решетняк, М. Ю. Моделирование процессов динамо в геофизике: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 25.00.10 / Решетняк Максим Юрьевич; Институт физики Земли им. Г. А. Гамбурцева. – М., 2003. – 302 с.
7. Merrill, R., McElhinny, M., McFadden, P. The Magnetic Field of the Earth / R. Merrill, M. McElhinny, P. McFadden. – N.Y.: Acad. Press, 1996. – 532 p.
8. Vodinchar, G., Feshchenko, L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System / G. Vodinchar, L. Feshchenko // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – № 13. – 3000. – DOI: 10.3390/math11133000.